



TITLE:

# Colombeau型超函数の中での微分方程式の可解性と非可解性(函数解析を用いた偏微分方程式の研究)

AUTHOR(S):

富川, 尚充

---

CITATION:

富川, 尚充. Colombeau型超函数の中での微分方程式の可解性と非可解性(函数解析を用いた偏微分方程式の研究). 数理解析研究所講究録 1996, 969: 143-152

ISSUE DATE:

1996-10

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/60652>

RIGHT:

## Colombeau型超函数の中での微分方程式の 可解性と非可解性

東大数理 富川 尚亮 (Takamitsu Tomikawa)

### 1. Colombeau型の超函数

#### 1-1. Colombeauによる定義

定義1.  $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  の部分集合列  $\mathcal{A}_g(\mathbb{R}^n)$  ( $g=0,1,2,\dots$ ) を、次のように定義する。

$$\mathcal{A}_g(\mathbb{R}^n) = \left\{ \phi(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n); \int_{\mathbb{R}^n} x^\alpha \phi(x) dx = \delta_{0,|\alpha|}, 0 \leq |\alpha| \leq g \right\}$$

ここにおいて、 $\delta$  はクロネッカーのデルタである。

定義2.  $\phi(x) \in \mathcal{A}_0(\mathbb{R}^n)$  とする。このとき、 $\phi_\varepsilon(x)$  ( $\varepsilon \in (0,1]$ ) を次のように定義する。

$$\phi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} \phi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

ここで、任意の  $\varepsilon \in (0,1]$  に対して、 $\phi(x) \in \mathcal{A}_g(\mathbb{R}^n)$  ならば、 $\phi_\varepsilon(x) \in \mathcal{A}_g(\mathbb{R}^n)$  が成り立つ。

定義3.  $\Omega$  は  $\mathbb{R}^n$  の開集合とする。次のような写像を考える。

$$R: \mathcal{A}_0(\mathbb{R}^n) \times \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$(\phi, x) \longmapsto R(\phi, x)$$

ただし、 $\phi \in \mathcal{A}_0(\mathbb{R}^n)$  を固定すると  $R(\phi, x) \in C^\infty(\Omega)$

このとき、次の条件を満たす写像を moderate な写像という。

$$\forall K \subset \subset \Omega, \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n, \exists N_{K,\alpha} \in \mathbb{N}$$

$$\text{s.t. } \forall \phi(x) \in \mathcal{A}_{N_{K,\alpha}}(\mathbb{R}^n), \exists C_{K,\alpha,\phi} > 0, \exists \varepsilon_{K,\alpha,\phi} > 0$$

$$\text{s.t. } 0 < \varepsilon < \varepsilon_{K,\alpha,\phi} \Rightarrow \sup \{ |\partial_x^\alpha R(\phi, x)|; x \in K \} \leq C_{K,\alpha,\phi} \varepsilon^{-N_{K,\alpha}}$$

一方、次の条件を満たす写像を null な写像という。

$$\forall K \subset \subset \Omega, \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n, \exists N_{K,\alpha} \in \mathbb{N}, \exists \{a_g(K, \alpha)\}_{g=0}^{+\infty} \text{ ただし } N \ni a_g \nearrow +\infty$$

$$\text{s.t. } \forall g \geq N_{K,\alpha}, \forall \phi(x) \in \mathcal{A}_g(\mathbb{R}^n), \exists C_{K,\alpha,\phi} > 0, \exists \varepsilon_{K,\alpha,\phi} > 0$$

$$\text{s.t. } 0 < \varepsilon < \varepsilon_{K,\alpha,\phi} \Rightarrow \sup \{ |\partial_x^\alpha R(\phi, x)|; x \in K \} \leq C_{K,\alpha,\phi} \varepsilon^{a_g(K, \alpha) - N_{K,\alpha}}$$

定義 4.  $\Omega$  は  $\mathbb{R}^n$  の開集合とする。このとき、新しい超関数の空間を次のように定義する。

$$\mathcal{Y}(\Omega) = \{ \text{moderate な写像} \} / \{ \text{null な写像} \}$$

ここで、 $\mathbb{R}^n$  上の distribution は、次のように埋め込まれる。

$$Cd: \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \ni f \longmapsto [(Cd f)(\phi, x)] \in \mathcal{Y}(\mathbb{R}^n)$$

ただし、

$$(Cd f)(\phi, x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x+y) \phi(y) dy$$

定義5.  $[R(\phi, x)]$  が  $\mathcal{U}^\infty(\Omega)$  の元であるとは、 $R(\phi, x)$  が次の条件を満たすことである。

$$\forall K \subset \subset \Omega, \exists N_K \in \mathbb{N}$$

$$\text{s.t. } \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n, \exists M_{K, \alpha} \in \mathbb{N}_0$$

$$\text{s.t. } \forall \phi(x) \in \mathcal{S}_{M_{K, \alpha}}(\mathbb{R}^n), \exists C_{K, \alpha, \phi} > 0, \exists \varepsilon_{K, \alpha, \phi} > 0$$

$$\text{s.t. } 0 < \varepsilon < \varepsilon_{K, \alpha, \phi} \Rightarrow \sup\{|\partial_x^\alpha R(\phi_\varepsilon, x)|; x \in K\} \leq C_{K, \alpha, \phi} \varepsilon^{-N_K}$$

定義6.  $f = [R(\phi, x)] \in \mathcal{U}(\Omega)$  に対して、 $f \approx 0$  であることを、次のように定義する。

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} R(\phi_\varepsilon, x) = 0 \quad (\mathcal{D}'(\Omega) \text{ の意味で})$$

つまり、任意に固定した  $\psi(x) \in C_0^\infty(\Omega)$  に対して、次が成り立つことである。

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} R(\phi_\varepsilon, x) \psi(x) dx = 0$$

## 1-2. 片岡による定義

定義7. 急減少関数の空間  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  の部分集合  $\mathcal{S}_0(\mathbb{R}^n)$  を次のように定義する。

$$\mathcal{S}_0(\mathbb{R}^n) = \left\{ \phi(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n); \hat{\phi}(\xi) = 1 + O(|\xi|^{-\infty}), \xi \rightarrow 0 \right\}$$

ここにおいて、 $\hat{\phi}(\xi)$  は  $\phi(x)$  の Fourier 変換である。

ここで、 $\left\{ \phi_\varepsilon(x) (= \frac{1}{\varepsilon^n} \phi(\frac{x}{\varepsilon})) ; \phi(x) \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R}^n), \varepsilon > 0 \right\}$  は、 $\mathcal{S}_0(\mathbb{R}^n)$  に含まれる。

定義8.  $\Omega$  は  $\mathbb{R}^n$  の開集合とする。次のような写像を考える。

$$R: \mathcal{S}_0(\mathbb{R}^n) \times \Omega \longrightarrow \mathbb{C} \\ (\phi, x) \longmapsto R(\phi, x)$$

ただし、 $\phi \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R}^n)$  を固定するごとに  $R(\phi, x) \in C^\infty(\Omega)$

このとき、次の条件を満たす写像を moderate な写像という。

$$\forall K \subset \subset \Omega, \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n, \exists N_{K,\alpha} \in \mathbb{N}$$

$$\text{s.t. } \forall \phi(x) \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R}^n), \exists C_{K,\alpha,\phi} > 0, \exists \varepsilon_{K,\alpha,\phi} > 0$$

$$\text{s.t. } 0 < \varepsilon < \varepsilon_{K,\alpha,\phi} \Rightarrow \sup \{ |\partial_x^\alpha R(\phi_\varepsilon, x)|; x \in K \} \leq C_{K,\alpha,\phi} \varepsilon^{-N_{K,\alpha}}$$

一方、次の条件を満たす写像を null な写像という。

$$\forall K \subset \subset \Omega, \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n, \forall \phi(x) \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R}^n), \forall l \in \mathbb{N}$$

$$\exists C_{K,\alpha,\phi,l} > 0, \exists \varepsilon_{K,\alpha,\phi,l} > 0$$

$$\text{s.t. } 0 < \varepsilon < \varepsilon_{K,\alpha,\phi,l} \Rightarrow \sup \{ |\partial_x^\alpha R(\phi_\varepsilon, x)|; x \in K \} \leq C_{K,\alpha,\phi,l} \varepsilon^l$$

定義9.  $\Omega$  は  $\mathbb{R}^n$  の開集合とする。このとき、新しい超函数の空間を次のように定義する。

$$\mathcal{Y}_*(\Omega) = \{ \text{moderate な写像} \} / \{ \text{null な写像} \}$$

ここで、

$$\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n) \ni f \longmapsto [(Cd f)(\phi, x)] \in \mathcal{Y}_*(\mathbb{R}^n)$$

は well-defined であり、"Cd" は局所性をもつので埋め込み

$$Cd: \mathcal{D}' \rightarrow \mathcal{Y}_*$$

が得られる。

定義10.  $[R(\phi, x)]$  が  $\mathcal{G}_*(\Omega)$  の元であるとは、 $R(\phi, x)$  が次の条件を満たすことである。

$$\forall K \subset \subset \Omega, \exists N_K \in \mathbb{N}$$

$$\text{s.t. } \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n, \forall \phi(x) \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R}^n), \exists C_{K, \alpha, \phi} > 0, \exists \varepsilon_{K, \alpha, \phi} > 0$$

$$\text{s.t. } 0 < \varepsilon < \varepsilon_{K, \alpha, \phi} \Rightarrow \sup \{ |\partial_x^\alpha R(\phi, x)|; x \in K \} \leq C_{K, \alpha, \phi} \varepsilon^{N_K}$$

定義11.  $f = [R(\phi, x)] \in \mathcal{G}_*(\Omega)$  に対して、 $f \stackrel{\theta}{\sim} 0$  であることを、次のように定義する。

$$\forall K \subset \subset \Omega, \forall \phi(x) \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R}^n), \exists C_{K, \phi} > 0, \exists \theta_{K, \phi} > 0$$

$$\text{s.t. } \forall \psi(x) \in C_0^\infty(K), 0 < \varepsilon < \theta_{K, \phi}$$

$$\Rightarrow \left| \int_K R(\phi, x) \psi(x) dx \right| \leq C_{K, \phi} \varepsilon^{\theta_{K, \phi}} \cdot \sup \{ |\partial_x^\alpha \psi(x)|; x \in K, |\alpha| \leq C_{K, \phi} \}$$

※  $\Omega$  が相対コンパクトな開集合の場合、 $(Cd u)(\phi, x) \in \mathcal{G}(\Omega)$  ( $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ )

は次のように定義する。 $\phi(x) \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R}^n)$  に対して、

$$d(\phi) := \sup \{ |x|; \phi(x) \neq 0 \}, \quad \overline{\Omega}_a := \{ x \in \Omega; \text{dist}(x, \Omega^c) \geq a \}$$

とし、次の性質をもつ  $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  の元  $K_\phi$  を考える。

$$K_\phi(x) = 1 \quad (x \in \overline{\Omega}_{2d(\phi)}), \quad \text{supp } K_\phi \subset \overline{\Omega}_{d(\phi)}, \quad 0 \leq |K_\phi(x)| \leq 1 \quad (x \in \mathbb{R}^n)$$

ここで、次のようにおく。

$$(Cd u)(\phi, x) = \int_{\mathbb{R}^n} (K_\phi f)(t+x) \phi(t) dt$$

2. あるクラスの微分方程式の一般解について

補題1.  $\Omega$  は  $\mathbb{R}^n$  の開集合とする。  $C(\Omega)$ - 函数列  $\{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$  が  $\Omega$  上  $f(x) \in C(\Omega)$  に一様収束するとする。

このとき、任意の  $\phi \in \mathcal{A}_0$  を固定して、  $x \in \Omega$  と  $\varepsilon \in (0, 1]$  を変数と考えるとき、固定した  $\phi$  と  $\Omega$  に含まれる任意のコンパクト集合  $K$  に対して正の定数  $\varepsilon_{K, \phi}$  が定まり、  $(Cdf_n)(\phi, x)$  は  $(Cdf)(\phi, x)$  に  $(0, \varepsilon_{K, \phi}) \times K \subset (0, 1] \times \Omega$  上一様収束する。  
証明.  $\phi \in \mathcal{A}_0$  に対して、  $\int_{\mathbb{R}^n} |\phi_\varepsilon(t)| dt = \int_{\text{supp } \phi} |\phi(t)| dt$  が成り立つので、左辺は  $\varepsilon \in (0, 1]$  によらず  $\phi$  によって定まる定数  $M_\phi (< +\infty)$  になる。  $\Omega$  に含まれるコンパクト集合  $K$  と  $\phi \in \mathcal{A}_0$  に対して

$$0 < \varepsilon < \varepsilon_{K, \phi} \Rightarrow K + \text{supp } \phi_\varepsilon \subset \Omega$$

を満たすように正の定数  $\varepsilon_{K, \phi}$  をとれる。このとき、

$0 < \varepsilon < \varepsilon_{K, \phi}, x \in K, t \in \text{supp } \phi_\varepsilon \Rightarrow |(K\phi_\varepsilon f_n)(t+x) - (K\phi_\varepsilon f)(t+x)| \leq \|f_n - f\|_{L^\infty(\Omega)}$  が成り立つ。よって、  $0 < \varepsilon < \varepsilon_{K, \phi}, x \in K$  ならば、

$$\begin{aligned} & |(Cdf_n)(\phi, x) - (Cdf)(\phi, x)| \\ & \leq \int_{\mathbb{R}^n} |(K\phi_\varepsilon f_n)(t+x) - (K\phi_\varepsilon f)(t+x)| |\phi_\varepsilon(t)| dt \leq M_\phi \|f_n - f\|_{L^\infty(\Omega)} \end{aligned}$$

が成り立つことから  $(0, \varepsilon_{K, \phi}) \times K$  上一様収束することがわかる。

補題2.  $\Omega$  は  $\mathbb{R}^n$  の開集合とする。  $\Omega$  上の  $\mathcal{A}(\Omega)$ - 函数列  $\{\psi_n(\phi, x)\}_{n \in \mathbb{N}}$  は、任意に固定した  $\phi \in \mathcal{A}_0$  と、  $\Omega$  に含まれる任意のコンパクト集合  $K$  に対して正の定数  $\varepsilon_{K, \phi}$  が定まり、  $(0, \varepsilon_{K, \phi}) \times K$  上 0 に

一様収束するとする。

このとき、 $v(\phi, x) \in \mathcal{U}(\Omega)$  が、 $\mathbb{R}_+$  で定義され自然数値をとり広義単調増加で無限大に発散する函数  $n(y) \in N(y > 0)$  と上記の  $\{v_n(\phi, x)\}_{n \in \mathbb{N}}$  を用いて

$$v(\phi, x) = v_{n(\|\phi\|)}(\phi, x) \quad (\|\cdot\| \text{ は } L^\infty\text{-ノルム, 以下同様})$$

と書き表せるならば、 $v(\phi, x) \approx 0$  が成り立つ。

証明、任意の  $\psi(x) \in C_0^\infty(\Omega)$  に対して、 $K_\psi = \text{supp } \psi$  とおくと、

$$\begin{aligned} \left| \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} v(\phi_\varepsilon, x) \psi(x) dx \right| &= \left| \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{K_\psi} v(\phi_\varepsilon, x) \psi(x) dx \right| = \left| \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{K_\psi} v_{n(\|\phi_\varepsilon\|)}(\phi_\varepsilon, x) \psi(x) dx \right| \\ &\leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|v_{n(\|\phi_\varepsilon\|)}\|_{K_\psi} \int_{K_\psi} |\psi(x)| dx = 0 \end{aligned}$$

補題3、 $\Omega$  は  $\mathbb{R}^n$  の開集合とする。 $C(\Omega)$ -函数列  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  に対し、次の条件(★)を満たし、 $\mathbb{R}_+$  で定義され、自然数値をとり、広義単調増加で無限大に発散する函数  $n(y) \in N(y > 0)$  が存在するとする。

$$(\star) \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n, \exists m_\alpha \in \mathbb{N}, \forall \phi \in \mathcal{A}_0, \exists C_{\alpha, \phi} > 0, \exists \varepsilon_{\alpha, \phi} > 0$$

$$\text{s.t. } 0 < \varepsilon < \varepsilon_{\alpha, \phi} \Rightarrow \sup_{x \in \Omega} |\partial^{(\alpha)} f_{n(\|\phi_\varepsilon\|)}(x)| \leq C_{\alpha, \phi} (\|\phi_\varepsilon\|)^{m_\alpha}$$

このとき、 $F(\phi, x) := (C_\alpha f_{n(\|\phi\|)})(\phi, x)$  は  $\mathcal{U}(\Omega)$  の元になる。

証明、任意に固定した  $\phi \in \mathcal{A}_0$  と  $K \subset \subset \Omega$  に対して

$$0 < \varepsilon < \varepsilon_{K, \phi} \Rightarrow K + \text{supp } \phi_\varepsilon \subset \Omega$$

を満たすように  $\varepsilon_{K, \phi}$  をとり、任意に固定した  $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$  に対して、

$$0 < \varepsilon < \varepsilon_{\alpha, \phi} \Rightarrow \sup_{x \in \Omega} |\partial^{(\alpha)} f_{n(\|\phi_\varepsilon\|)}(x)| \leq C_{\alpha, \phi} (\|\phi_\varepsilon\|)^{m_\alpha}$$

を満たすように  $C_{\alpha, \phi}, \varepsilon_{\alpha, \phi}$  をとることができる。ここにおいて、



$\varepsilon_{K,\alpha,\phi} := \min\{\varepsilon_{K,\phi}, \varepsilon_{\alpha,\phi}\}$ ,  $C_{K,\alpha,\phi} := C_{\alpha,\phi} \|\phi\|^{m_\alpha} M_\phi$  とおけば,

$$|\partial^{(\alpha)} F(\phi_2, x)| \leq \|\partial^{(\alpha)} f_{n(\|\phi_2\|)}\|_{L^\infty(\Omega)} \times \int_{\text{supp } \phi_2} |\phi_2(t)| dt \leq C_{\alpha,\phi} (\|\phi_2\|)^{m_\alpha} M_\phi$$

( $0 < \forall \varepsilon < \varepsilon_{K,\alpha,\phi}$ ,  $\forall x \in K$ )

が成り立つ。 $M_\phi$  は補題 1 の証明中に出てくるものである。

定理.  $\Omega$  は  $\mathbb{R}^l$  の相対コンパクトな開集合、 $\Omega_1$  は  $\mathbb{R}^{m-l}$  ( $l \leq m$ ) の相対コンパクトな開集合とする。次の型の微分方程式

$$(\star\star) \quad Lu(x_1, x_2, \dots, x_m) = f(x_1, x_2, \dots, x_l)$$

ただし、 $F(u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_m}) = Lu(x_1, x_2, \dots, x_l)$  と考

え、 $F(y_0, y_1, \dots, y_k)$  は緩増加函数であるとする。

を考える。任意の  $l$  変数多項式  $P(x_1, x_2, \dots, x_l)$  に対して、

$$Lv(x_1, x_2, \dots, x_m) = P(x_1, x_2, \dots, x_l)$$

が  $C^\infty(\Omega \times \Omega_1)$  解  $v(x_1, x_2, \dots, x_m)$  をもつとき、任意の  $f \in C(\Omega)$  に対して  $(\star\star)$  は  $\mathcal{G}^\infty(\Omega \times \Omega_1) / \sim$  解をもつ。

証明. 補題 1, 補題 2 により、次の 2 つの条件を満たす  $C^\infty(\Omega \times \Omega_1)$  函数列  $\{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$  を構成すれば充分である。

(i)  $Lf_n(x) - f(x)$  が  $\Omega \times \Omega_1$  上 0 に一様収束する。

(ii)  $\mathbb{R}_+$  で定義され、自然数値をとり、広義単調増加で無限大に発散する適当な函数  $N(y) \in \mathbb{N}$  ( $y > 0$ ) を用いて

$$F(\phi, x) = (Cd f_{n(\|\phi\|)}) (\phi, x)$$

と定めると、 $F(\phi, x)$  は  $\mathcal{G}^\infty(\Omega)$  の元になる。

補題 3 により、条件 (ii) は次の条件 (ii)' を示せば充分である。

(ii)' 補題 3 の条件 (☆) を満たす、 $\mathbb{R}_+$  で定義され、自然数値をとり、広義単調増加で無限大に発散する函数  $N(y)$  ( $y > 0$ ) が存在する。

$\Omega$  はコンパクト集合なので、Weierstrass の多項式近似定理によって、 $f \in C(\Omega)$  に対して  $\Omega$  上一様収束する多項式列  $\{P_n(x_1, x_2, \dots, x_d)\}_{n \in \mathbb{N}}$  をとることができる。この多項式列に対し、

$$L U_n(x_1, x_2, \dots, x_m) = P(x_1, x_2, \dots, x_d)$$

を満たす  $C^\infty(\Omega \times \Omega_1)$ -函数列  $\{U_n(x_1, x_2, \dots, x_m)\}_{n \in \mathbb{N}}$  をとれる。ここで、

$$N(y) := \max \left\{ \left\{ m \in \mathbb{N} : \sup_{x \in \Omega \times \Omega_1} \left| \partial_j^{(\alpha)} U_j(x) \right| : |\alpha| \leq m, 1 \leq j \leq m \right\} \leq y \right\}, 1 \right\}$$

とおけば、 $N(y)$  は  $\{U_n(x_1, x_2, \dots, x_m)\}_{n \in \mathbb{N}}$  に対して (ii)' を満たす。

3. Lewy-溝畑の方程式の  $\mathcal{G}_*$  / 総解 について

定理、 $f(x_2) \in C^\infty(\mathbb{R}) \setminus C^\omega(\mathbb{R})$  で、周期  $2\pi$  の周期函数、また、

$g(\phi, x_2) \in \mathcal{G}_*(\mathbb{R})$  は  $g(\phi, x_2) \stackrel{0}{\sim} 0$  で、 $\phi$  を固定すると  $x_2$  に

ついて周期  $2\pi$  の周期函数になるとする。このとき、

$$(1) \quad (\partial_1 + i x_1 \partial_2) u(\phi, (x_1, x_2)) \stackrel{\text{in } \mathcal{G}_*}{=} (Cdf)(\phi, x_2) + g(\phi, x_2)$$

を満たすような  $u(\phi, (x_1, x_2)) \in \mathcal{G}_*(\mathbb{R})$  は存在しない。

証明、以下、等号は  $\mathcal{G}_*$  での意味のものとする。ただし、絶対値に関する等号、不等号は通常の意味のものとする。

条件を満たす  $u(\phi, (x_1, x_2)) \in \mathcal{G}_*(\mathbb{R})$  が存在すると仮定して矛盾

を導く。\$u\$ は \$\phi, x\_1\$ を固定するごとに \$x\_2\$ についての周期 \$2\pi\$ の周期函数と考えるよい。\$u, f, g\$ の \$x\_2\$ についての複素 Fourier 級数展開を考え、式(1)は各 Fourier 係数 \$u\_p(\phi, x\_1), f\_p, g\_p(\phi)\$ についての常微分方程式と考えることができる。

$$(\partial_1 - p x_1) u_p(\phi, x_1) = f_p + g_p(\phi)$$

解は、\$u\_p(\phi, x\_1) = u\_p(\phi, 0) + e^{\frac{1}{2} p x\_1^2} \int\_0^{x\_1} (f\_p + g\_p(\phi)) e^{-\frac{1}{2} p s^2} ds\$ となる。

ある \$x\_1 = 2\delta > 0\$ に対して成り立つので代入し、変形すると、

$$(2) \quad f_p \int_0^{2\delta} e^{\frac{1}{2} p (4\delta^2 - s^2)} ds = u_p(\phi, 2\delta) - u_p(\phi, 0) - g_p(\phi) \int_0^{2\delta} e^{\frac{1}{2} p (4\delta^2 - s^2)} ds$$

$$(3) \quad |\delta e^{p\delta^2}| \leq \left| \int_0^\delta e^{\frac{1}{2} p (4\delta^2 - s^2)} ds \right| \leq \left| \int_0^{2\delta} e^{\frac{1}{2} p (4\delta^2 - s^2)} ds \right|$$

\$K = [0, 2\pi]\$ と \$\phi(x) \in \mathcal{A}\_0(\mathbb{R})\$ に対しては

$$\exists C_{K,\phi}, \exists \theta_{K,\phi}, \exists l_{K,\phi} \in \mathbb{N} \text{ s.t. } (4) \quad |g_p| = \left| \int_0^{2\pi} g(\phi, x_2) e^{-ipx_2} dx_2 \right| \leq C_{K,\phi} e^{\theta_{K,\phi}} (|p|+1)^{l_{K,\phi}}, \quad 0 < \forall \varepsilon < \theta_{K,\phi}$$

\$K' = [0, 2\delta] \times [0, 2\pi]\$ と \$\phi(x) \in \mathcal{A}\_0(\mathbb{R}^2)\$ に対しては

$$\exists C_{K',\phi}, \exists \varepsilon_{K',\phi}, \exists m_{K'} \in \mathbb{N} \text{ s.t. } \sup_{(x_1, x_2) \in K'} |u(\phi, (x_1, x_2))| \leq C_{K',\phi} e^{-m_{K'}}, \quad 0 < \forall \varepsilon < \varepsilon_{K',\phi}$$

$$\text{よって、} (5) \quad \sup_{x_1 \in [0, 2\delta]} |u_p(\phi, x_1)| = \sup_{x_1 \in [0, 2\delta]} \left| \int_0^{2\pi} u(\phi, (x_1, x_2)) e^{-ipx_2} dx_2 \right| \leq 2\pi C_{K',\phi} e^{-m_{K'}}, \quad 0 < \forall \varepsilon < \varepsilon_{K',\phi}$$

ここで、式(3), (4), (5) を用いて \$|f\_p|\$ を評価すると、

$$|f_p| \leq \frac{1}{\delta e^{p\delta^2}} 4\pi C_{K',\phi} \frac{1}{\varepsilon^{m_{K'}}} + C_{K,\phi} e^{\theta_{K,\phi}} (|p|+1)^{l_{K,\phi}}, \quad 0 < \forall \varepsilon < \min\{\theta_{K,\phi}, \varepsilon_{K',\phi}\}$$

また、\$\varepsilon\$ を \$P\$ の狭義単調減少函数 \$\varepsilon(p) = \exp(-\frac{p\delta^2\theta\_{K,\phi}}{2m\_{K'}})\$ と

思えば、

$$|f_p| \leq \left( \frac{4\pi C_{K',\phi}}{\delta} + C_{K,\phi} (|p|+1)^{l_{K,\phi}} \right) \exp\left(-\frac{p\delta^2\theta_{K,\phi}}{2m_{K'}}\right)$$

となり、\$f\$ の Fourier 係数 \$f\_p\$ が \$P\$ に関して指数的に減少するので \$f(x\_2) \in C^\omega(\mathbb{R})\$ が導かれる。これは矛盾である。